SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. FAVINI

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ASTRATTE DEGENERI E SINGOLARI

14 GENNAIO 1982.

A.FAVINI

Equazioni differenziali astratte degeneri e singolari

Vorrei esporre alcuni risultati che ho ottenuto relativamente ad alcuni tipi di equazioni astratte di tipo singolare o degenere facendo uso delle tecniche di Da Prato e Grisvard.

Siano X, Y due spazi di Banch complessi e siano B, A_0, A_1 operatori lineari chiusi, i cui domini vengono denotati con D(B), $D(A_0)$, $D(A_1)$, rispettivamente.
B opera da X in sé mentre A_0, A, vanno che Y in X.

Considero l'equazione

$$BA_1u + A_0u = h \tag{1}$$

dove $h \in X$ e la incognita $u \in D(P,B) = D(A_0) \cap D(BA_1)$.

Posto $P(\lambda) = \lambda A_1 + A_0$, assumerò che $D(A_0) \subsetneq D(A_1)$ e che A_0 ha inverso limitato. Ciò assicura la invertibilità di $P(\lambda)$ in un interno di 0.

Si assume anche che $D(A_0)$ è denso in Y.

ASSUNZIONI

I Lo spettro di B è contenuto in $S_{a,\theta} = \{z: |\arg z| < \theta, |z| > a\}$ $\theta < \pi$ e $a > o$.
Lo spettro di $P(\lambda) = \{\lambda : P(\lambda)$ non ha inverso $\in L(X,Y)\}$ giace all'esterno del settore

$S_\theta = \{z: |\arg z| < \theta,\ |z| > 0\}$;

si pone $\Gamma_{a,\theta} = \partial S_{a,\theta}$.

II Per ogni $\lambda \notin S_{a,\theta}$, $\|(B-\lambda)^{-1}\|_{L(X)} \leq C(1+|\lambda|)^{-1}$

III Per ogni $\lambda \notin S_{\theta}$, $\|P(\lambda)^{-1}\|_{L(X,Y)} \leq C(1+|\lambda|)^{h}$,

$\|A_0 P(\lambda)^{-1}\|_{L(X)} \leq C(1+|\lambda|)^{m}$,

dove h, m sono interi, $h > -1$, $m > 0$.

IV Per ogni λ in un intorno di $\Gamma_{a,\theta}$ risulta

$\|(B-\lambda)^{-1} [B; A_0 P(\lambda)^{-1}] x\|_{D(B^k)} \leq C(1+|\lambda|)^{\alpha} \|x\|_X$,

dove x D_B, k è un intero > o e $\alpha \in R$.

V Per ogni λ in un intorno di $\Gamma_{a,\theta}$ risulta

$\|[B; A_0 P(\lambda)^{-1}] (B-\lambda)^{-1}\|_{L(X, D(B^k))} \leq C(1+|\lambda|)^{\beta}$,

dove k è un intero > 0 e $\beta \in R$.

Non si assume che B commuti con A_0, A_1.

Vale il seguente risultato di unicità, che estende una affermazione di P.Grisvard concernente il problema regolare, con $A_1 = 1$.

Teorema 1: Valgano I-II-IV e la seconda di III. Se la k di IV soddisfa $k > \max\{m, \alpha\}$ e la costante C della stessa IV è sufficientemente piccola, allora (1) ha al massimo una soluzione.

Il seguente esempio chiarisce la necessità della ipotesi IV .

Esempio 1: Si consideri

$$\frac{d}{dt}(ty)(t) = -tx(t) + y(t) + f(t), \qquad t \in (0,T)$$
$$\dot{y}(t) = -x(t) + g(t),$$
$$y(0) = 0$$

E' banale vedere che il problema ha soluzione se $f(t) = tg(t)$ e

allora $x(t)=g(t)-y'(t)$, con $y(0)=0$. Per esempio,

$x(t)=g(t)$, $y(t)=0$ oppure $x(t)=g(t)-1$, $y(t)=t$.

Si ha: $(\lambda A_1+A_0)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda t \\ -1 & t \end{bmatrix}$ e così $h=m=1$. D'altra parte

$\left[B;A_0(\lambda A_1+A_0)^{-1}\right]_0^\lambda = \begin{bmatrix} -2\lambda t \\ -\lambda \end{bmatrix}$ ma chiaramente non si può trovare k

>1 che soddisfa IV.

La dimostrazione del Teorema 1 parte dalla considerazione dello integrale

$$V=(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{-k}(B-\lambda)^{-1} P(\lambda)^{-1} d\lambda$$

Se u soddisfa (1) con $h \doteq 0$, allora $A_0u=w$ soddisfa $A_1A_0^{-1}Bw+w=0$.
D'ora in poi denotiamo $A_1A_0^{-1}$ con T.
Si vede allora che $0 = B^{-k}w+Ww$
dove W è connesso alla ipotesi IV, nel senso che questo consente di dedurre la limitatezza di W da X a $D(B^k)$.
Essendo B un isomorfismo tra questi spazi, il risultato segue.

Riguardo il problema dell'esistenza, si ha

<u>Teorema 2</u>: Se valgono I.II.III e V, la k di V soddisfa $k>\max\{h,m,\beta\}$ e C è sufficientemente piccola, allora (1) ha almeno una soluzione, data da

$$(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_{a,\theta}} \lambda^{-k}P(\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1} B^k f\, d\lambda, \qquad (2)$$

dove f è un elemento conveniente di $D(B^k)$, per ogni $h\in D(B^k)$.

Un semplice esempio:

$$\frac{d}{dt}(x+ty)(t)=x(t)+f(t), \qquad 0<t<T,$$
$$0=-x(t)-ty(t)+g(t),$$

$$x(t)+ty(t) \underset{t\ 0}{} 0.$$

Si ha h=m=1. Inoltre, poiché

$$A_0(\lambda A_1+A_0)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

si ha $\beta=-1$, $k=2$. Di qui, esistenza ed unicità. Risulta

$$x(t)=g(t)-t(g'(t)-f(t)),\quad y(t)=g\,(t)-f(t),\quad g(0)=0.$$

I risultati forniscono quindi una estensione di DUBINSKII.

Per quanto concerne (1) negli spazi d'interpolazione, ricordo che se B è un operatore positivo in un Banach X e k è un intero non negativo, $\frac{k}{k+1}<\theta<1$, allora

$$(X,\ D(B^{k+1}))_{\theta,p} = \{a\in X:\ \| t^{\theta(k+1)-k}\ [B(B+t)^{-1}]\ B^k a\|_{L^*_p(X)}<\infty\}$$

e quindi $(X,D(B^{k+1}))_{\frac{\theta+k}{k+1},p}$ coincide con l'insieme degli $a\in D(B^k)$ per cui $B^k a\ \ (A,D(B))_{\theta,p}$, $0<\theta<1$.

Il risultato seguente estende allora quello di Da Prato e Grisvard a questa situazione.

Teorema 3: Se valgono I.II.III.V(con k=0), p>1 e risulta

$$\|[B;\ A_0P(\lambda)^{-1}]\ (B-\lambda)^{-1}x\|_{(X,D(B^{k+1}))_{\frac{k+\theta}{k+1},p}} \leq$$

IV

$$\leq C(1+|\lambda|)^{\gamma}\ \|x\|_{(X,D(B))_{\theta,p}},\quad 0<\theta<1,$$

con $k > \max\{1, m-1, \beta, \gamma\}$ e C abbastanza piccolo, allora (1) ha almeno una soluzione.

Osserviamo esplicitamente che II.III.V.VI sono condizioni sufficienti a dare senso ad integrali come (2).

A volte può essere più opportuno studiare direttamente lo stesso integrale su $\Gamma_{a,\theta}$.

Esempio. Siano $A_0(t)$, $A_1(t)$, $t \in [0,T]$, operatori lineari chiusi dal Banach F in uno spazio di Banach E e sia $f \in L^p(0,T;E)$, $p>1$.

Si dice che u è una soluzione stretta di

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} A_1(t)u(t)+A_0(t)u(t) = f(t), \quad 0<t<T, \\ &\lim_{t \to 0} A_1(t)u(t) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

se $u \in L^p(0,T;F)$, $\frac{d}{dt} A_1(.)u(.) \in L^p(0,T;E)$ e vale (3).

Sia $-A(t)$, $0<t<T$, il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico di operatori lineari nel Banack E, per cui esiste $(A(t)+\lambda)^{-1}$ per ogni λ, $\operatorname{Re}\lambda>0$ e $\|(A(t)+\lambda)^{-1}\|_{L(E)} \leq C(1+|\lambda|)^{-1}$, $\operatorname{Re}\lambda>0$. Di qui, esistono $M>0$, $\theta \in (\pi/2,\pi)$ tali che

$$\|(A(t)+\lambda)^{-1}\|_{L(E)} \leq M(1+|\lambda|)^{-1}, \quad \lambda \in S_\theta .$$

Per semplicità assumiamo che $D(A(t)) \equiv D$ è indipendente da $t \in [0,T]$. Assumiamo poi che per ogni $u \in D$, $A(t)u$ è fortemente differenziabile con continuità su $[0,T]$ (vedi per es., il libro di TANABE). Segue che

$$\frac{\partial}{\partial t}(A(t)+\lambda)^{-1} = -(A(t)+\lambda)^{-1}A'(t)(A(t)+\lambda)^{-1} \quad \text{e} \quad \left\|\frac{\partial}{\partial t}(A(t)+\lambda)^{-1}\right\| \leq C(1+|\lambda|)^{-1}$$

essendo $\|A'(t)A(t)^{-1}\|_{L(E)} \leq \text{Cost.}$

Definiamo A_0, A_1 ponendo

$(A_0u)(t)=A(t)u(t)$, $u\in L^P(0,T;D)$,

$(A_1u)(t)=tu(t)$, $u\in L^P(0,T;E)$.

Risulta: $\|(\lambda t+A(t))^{-1}\| \leq C(1+|\lambda|t)^{-1}$, $\lambda\in S_\theta$,

e così

$$\left\|\int_{\Gamma_\theta}\int_0^t e^{z(t-s)}(\lambda t+A(t))^{-1}f(s)dsd\lambda\right\| <$$

$$\leq \int_0^t\int_{\Gamma_\theta}\left|\frac{e^{\lambda(t-s)}}{|\lambda|t}\right| \|f(s)\|\ ds\ |d\lambda| \leq \frac{C}{t}\int_0^t\|f(s)\|\ ds.$$

Ma allora, applicando la disuguaglianza di Hardy abbiamo

$$Sf\|^p_{L^p(0,T;E)} \leq C\int_0^T t^{-p}\left[\int_0^t\|f(s)\|\ ds\right]^p dt <$$

$$\leq C'\left|\int_0^T\|f(t)\|^p dt = C'\|f\|^p_{L^p(0,T,E)}\right.\cdot$$

dove $Sf = (2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_\theta}(\lambda A_1+A_0)^{-1}(B-\lambda)^{-1}fd\lambda$

Occorre ora stimare

$$\int_{\Gamma_\theta}\lambda^{-1}\,[B;\,A_0(\lambda A_1+A_0)^{-1}]\ (B-\lambda)^{-1}fd\lambda =$$

$$= -\int_{\Gamma_\theta}[B;A_1(\lambda A_1+A_0)^{-1}]\ (B-\lambda)^{-1}\ fd\lambda.$$

Poiché

$$\frac{\partial}{\partial t}tA(t)^{-1}(\lambda tA(t)^{-1}+1)^{-1} = -\lambda^{-1}\frac{\partial}{\partial t}(\lambda tA(t)^{-1}+1)^{-1} =$$

$$= -(\lambda t\ A(t)^{-1}+1)^{-1}\ \frac{d}{dt}\ tA(t)^{-1}\ (\lambda tA(t)^{-1}+1)^{-1} =$$

$$= - A(t)(\lambda t+A(t))^{-1}(\lambda t+A(t))^{-1}+\lambda^{-1}A(t)(\lambda t+A(t))^{-1}(\lambda t+\dot{A}(t)-A(t))A(t)^{-1}\cdot$$

$$\cdot A'(t)\ A(t)^{-1}\ A(t)\ (\lambda t+A(t))^{-1} =$$

$$= - A(t)(\lambda t+A(t))^{-1}(\lambda t+A(t))^{-1}+\lambda^{-1}\ A'(t)A(t)^{-1}A(t)\ (\lambda t+A(t)^{-1}\cdot$$

$$-\lambda^{-1}\ A(t)(\lambda t+A(t)^{-1}A'(t)\ A(t)^{-1}\ A(t)(\lambda t+A(t))^{-1},$$

risulta

$$\|(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_\theta}[B;\ A_1(\lambda A_1+A_0)^{-1}]\ (B-\lambda)^{-1}fd\lambda\|^p_{L^p(0,T;E)} \leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^T\Big[\int_{\Gamma_\theta}\int_0^t |e^{\lambda(t-s)}|\Big\{\|A(t)(\lambda t+A(t))^{-1}(\lambda t+A(t))^{-1}f(s)\| +$$

$$+ |\lambda|^{-1}\|A'(t)A(t)^{-1}\|\|A(t)(\lambda t+A(t))^{-1}\|\ \|f(s)\| +$$

$$+ |\lambda|^{-1}\|A(t)(\lambda t+A(t))^{-1}\|\ \|A'(t)A(t)^{-1}\|\ \|A(t)(\lambda t+A(t))^{-1}\|\ \|f(s)\|$$

$$ds|d\lambda|]^p\ dt$$

Il secondo e terzo addendo non danno problemi. Quanto al primo,

$$\int_0^T\Big[\int_{\Gamma_\theta}\int_0^t|e^{(t-s)}|\ \|A(t)(\lambda t+A(t))^{-1}\|\ \|(\lambda t+A(t))^{-1}f(s)\|\ ds|d\lambda|\Big]\ dt \leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^T\Big[\int_{\Gamma_\theta}\int_0^t \frac{|e^{\lambda(t-s)}|}{|\lambda|t}\|f(s)\|\ ds\ |d\lambda|]^p\ dt \leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^T \frac{1}{t^p}\ [\int_0^t\|f(s)\|\ ds]^p\ dt \leqslant C'\ \|f\|^p_{L^p(0,T;E)}\ .$$

Per applicare il Teorema 3 occorre però una stima negli spazi d'interpolazione. Ma

$$B[B;A_0P(\lambda)^{-1}]\ (B-\lambda)^{-1}\ f =$$

$$= [B;\ [B;\ A_0P(\lambda)^{-1}]]\ (B-\lambda)^{-1}f + [B;A_0P(\lambda)^{-1}]\ (B-\lambda)^{-1}Bf,$$

se f appartiene a $D(B)$.

L'integrale $\int_{\Gamma_\theta} \lambda^{-1}[B;A_0P(\lambda)^{-1}]\ (B-\lambda)^{-1}\ Bfd\lambda$ è ben definito in

$L^P(0,T;E)$ in virtù di quanto visto prima. Dobbiamo aggiungere una ipo_
tesi di regolarità in più su $A(t)$ per stimare

$$[B;[B;A_0P(\lambda)^{-1}]] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\ (\lambda tA(t)^{-1}+1)^{-1}$$

Se $A(t)x$ è differenziabile due volte con continuità e

$\|A''(t)A(t)^{-1}\| <$ cost., risulta

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ A(t)(\lambda t+A(t))^{-1} = [1] + [2] + [3]$, dove

$$[1] =- \lambda\ [\frac{\partial}{\partial t}\ (\lambda tA(t)^{-1}+1)^{-1}]\ (tA(t)^{-1})'(\lambda tA(t)^{-1}+1)^{-1},$$

$$[2] =- \lambda\ (\lambda tA(t)^{-1}+1)^{-1}\ \frac{d^2}{dt^2}\ (tA(t)^{-1})\ (\lambda+A(t)^{-1}+1)^{-1},$$

$$[3] =- \lambda\ (\lambda+A(t)^{-1}+1)^{-1}(tA(t)^{-1})'\ [\frac{\partial}{\partial t}\ (\lambda tA(t)^{-1}+1)^{-1}].$$

$$\lambda^{-1}.[1] = \left\{\frac{\partial}{\partial t}\ (\lambda tA(t)^{-1}+1)^{-1}\right\}(\lambda t+A(t))^{-1} -$$

$$-\left\{\frac{\partial}{\partial t}\ (\lambda t+A(t))^{-1}+1)^{-1}\right\}tA(t)^{-1}A'(t)A(t)^{-1}.$$

$$.\ A(t)(\lambda t+A(t))^{-1} = [4] - [5]$$

$$[5] = \lambda(\lambda tA(t)^{-1}+1)^{-1}\left\{A(t)^{-1}tA(t)^{-1}A'(t)A(t)^{-1}\right\}$$

$$(\lambda tA(t)^{-1}+1)^{-1}\ tA(t)^{-1}A'(t)A(t)^{-1}A(t)(\lambda t+A(t))^{-1} =$$

norma piccola (previo eventualmente un opportuno cambiamento della variabile u). Si può così applicare il Teorema 3.

Esempio 3: Consideriamo il problema:

$$\frac{\partial}{\partial t} m(t,x)u(t,x) = -A(t,x,D)u(t,x)+f(t,x), 0<t<T, \; x\in\Omega$$

$$\lim_{t\ \ 0} m(t,x)u(t,x)=0,$$

dove Ω è un aperto limitato di R^n sufficientemente regolare, $m(t,x)\geq 0$ è una funzione di classe $C^{(1)}$ su $[0,T]\times\bar{\Omega}$, tale che $m(t,x)>0$ su $[0,T]\times\Omega$.

Assumiamo che la degenerazione sia nella sola x, nel senso che risulti $C_1\alpha(x)<m(t,x)<C_2\alpha(x), t\ \ [0,T], x\in\Omega$ e $|\frac{\partial}{\partial t} m(t,x)<Cm(t,x)$. $A(t,x,D)$ viene considerata come un operatore invertibile $A_0(t)$ da $H^{2m}(\ )\ \ H_0^m(\ )\to L^2(\ )$.

Posto $\lambda m(t,x)\ v(t,x)+A(t,x)v(t,x)= g(t,x)$,

assumiamo, per semplicità, (vedi, per es., Sobolevskii, per una trattazione più generale), che

$$\mathrm{Re}\int_0^T\int_\Omega A(t,x,D)v(t,x)\bar{v}(t,x)dxdt \geq$$

$$\geq \|v\|^2_{L^2(0,T;H^m(\ )} + C\|v\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))},$$

in modo che si possa dedurre

$$\mathrm{Re}\lambda\int_0^T\int_\Omega m(t,x)|v(t,x)|^2dxdt+\|v\|_{L^2(0,T;H^m(\Omega))}+C\|v\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}\leq$$

$$\leq \mathrm{Re}\int_0^T\int_\Omega f(t,x)\bar{v}(t,x)dxdt.$$

Le $\beta(x)>0$ su Ω, è misurabile, denotiamo con L^2_β l'insieme di tutte le u misurabili da Ω a $\mathbb{C}$ tali che

$$\int_\Omega \beta(x)^2 |u(x)|^2 dx < \infty.$$

Deduciamo allora facilmente che per $Re\lambda \geq 0$

$$(Re\lambda+\alpha_0)\, \|v\|_{L^2(0,T;L^2_{\sqrt{\alpha}})} \leq C\, \|f\|_{L^2(0,T;L^2_{1/\sqrt{\alpha}})}.$$

Analogamente,

$$|m\lambda|\, \|v\|_{L^2(0,T;L^2_{\sqrt{\alpha}})} \leq C\, \|f\|_{L^2(0,T;L^2_{1/\sqrt{\alpha}})}.$$

Poniamo $L^2(0,T;L^2_{\sqrt{\alpha}}) = V$, $L^2(0,T;L^2_{1/\sqrt{\alpha}}) = V'$, $H =$ $= L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Allora $V' \subsetneq H \subsetneq V$ densamente.

Assumiamo così $D(A_0) = L^2(0,T;D)$ dove $D = \{u \in H^{2m}(\Omega) \cap \cap H^m_0(\Omega),\ A_0(t)\, u \in L^2_{1/\sqrt{\alpha}}\ \forall t \in [0,T]\}$ (si noti che $A_0(t)u =$ $= A_0(t)A_0(r)^{-1}\ A_0(r)u)$. $D(A_1) = L^2(0,T;L^2_{\sqrt{\alpha}})$. Segue che A_1 risulta un isomorfismo da V su V'.

In base a risultati ben noti in L^2 ed alle immersioni che abbiamo ricordato, si ha

$$\|(\lambda A_1 + A_0)^{-1} f\|_V \leq C(1+|\lambda|)^{-1}\, \|f\|_{V'}$$

e quindi

$$\|A_0 p(\lambda)^{-1} f\|_{V'} \leq C\, \|f\|_{V'}.$$

Si tratta ora di stimare la norma di $[B; A_0 P(\lambda)^{-1}]$ nello spazio V^1. A tal fine, si osservi che

$$\frac{\partial}{\partial t} A_0(t)(\lambda A_1(t)+A_0(t))^{-1} = -\lambda(\lambda T(t)+1)^{-1} \left\{\frac{d}{dt} A_1(t) A_0(t)^{-1}\right\} . (\lambda T(t)+1)^{-1} =$$

$$= -\lambda(\lambda T(t)+1)^{-1} A_1'(t)\ A_0(t)^{-1} (\lambda T(t)+1)^{-1} +$$

$$+ \lambda(\lambda T(t)+1)^{-1} A_1(t) A_0(t)^{-1} A_0'(t)\ A_0(t)^{-1} (\lambda T(t)+1)^{-1} = [\,1\,] + [\,2\,].$$

Risulta $A'(t)A_0(t)^{-1}(\lambda T(t)+1)^{-1}=A_1(t)(\lambda A_1(t)+A_0(t))^{-1}$.

e così la [1] si maggiora in norma con una costante.

D'altra parte se

$$\|A_0'(t)A_0(t)^{-1}\|_{L(L^2_{1/\sqrt{\alpha}})} < \text{cost.},$$

essendo

$$[2] = A_0'(t)A_0(t)^{-1}(\lambda T(t)+1)^{-1}-(\lambda T(t)+1)^{-1}A_0'(t)A_0(t)^{-1}(\lambda T(t)+1)^{-1},$$

si deduce che anche la norma di [2] si maggiora con una costante.

Così

$$\|[B;A_0P(\lambda)^{-1}]\,(B-\lambda)^{-1}\|_{V'\to V'} \leq C(1+|\lambda|)^{-1}.$$

Per applicare il Teorema 3 occorre una stima della norma di $[B;A_0P(\lambda)^{-1}](B-\lambda)^{-1}$ negli spazi d'interpolazione.

Una ipotesi atta allo scopo (per poter valutare, cioè, la nor= ma di $\frac{\partial}{\partial t}(\lambda T(t)+1)^{-1}-\frac{\partial}{\partial s}(\lambda T(s)+1)^{-1}$ in $L^2_{1/\sqrt{\alpha}}$) è di assumere una re golarità superiore ai coefficienti in modo da poter stimare $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\lambda T(t)+1)^{-1}$; come nell'esempio precedente

Le cose sono chiaramente molto semplificate se $A(t,x,D)$ è in= dipendente da t.

Torniamo ora alle considerazioni generali, osservato che il caso forse più interessante è quello di $m=0$.

E' allora possibile approcciare la risolubilità di (1) in un senso più debole per mezzo della teoria degli operatori potenzia= li astratti (YOSIDA).

Ricordo che un operatore T, densamente definito in un Banach V si dice un operatore potenziale astratto se T ha inverso (in ge= nerale, non limitato) densamente definito e $-T^{-1}$ genera un semigrup

po limitato.

Supposto che $(\lambda T+1)^{-1} \leq C$ per Re $\lambda>0$, posto $R_\lambda = T(\lambda T+1)^{-1}$, R_λ soddisfa chiaramente l'equazione risolvente e $\|\lambda R_\lambda\| \leq C$. Ciò implica che R_λ è il risolvente d'un operatore S tale che $(\lambda+S)^{-1} \leq C|\lambda|^{-1}$.

Inoltre, $X = \overline{R(T)} \oplus N(T)$. Se $\overline{R(T)} = X$, allora $N(T) = \{0\}$ e così $-S=-T^{-1}$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo olomorfa in X. Se $\overline{R(T)} \neq X$, allora si è provata che la restrizione T_1 di T a $\overline{R(T)}$ è un operatore potenziale astratto in $\overline{R(T)}$, valendo $\overline{R(T)} = \overline{R(T_1)}$.

Si noti che quel che ci interessa è $T = A_1 A_0^{-1}$.

Una condizione sufficiente ad assicurare che T sia un operatore potenziale astratto analitico in X è allora che $N(A_1)\ D(A_0) = \{0\}$ e $\|A_0 P(\lambda)^{-1}\| \leq C$, Re $\lambda > 0$.

Se si lascia cadere l'assunzione $N(A_1) \cap D(A_0) = \{0\}$ (che, d'altra parte, non è troppo restrittiva per le applicazioni concrete), si dovrà considerare il problema in $\overline{R(T)}$.

Se poniamo in (1) $A_0 u = v$, la (1) diventa

$$BTv+v= h$$

Essendo $X = \overline{R(T)} \oplus N(T)$, denotando con P, la proiezione su N(T), risulta

$$BT_1(1-P)v + Pv+(1-P)\, v = Ph + (1-P)\, h\, .$$

Assumendo che la restrizione di B a $\overline{R(T)}$ soddisfi

$$\|(B-\lambda)^{-1}x\|_{\overline{R(T)}} \leq C(1+|\lambda|)^{-1}\, \|x\|_{\overline{R(T)}}$$

(1) equivale a

$$\begin{cases} Pv = Ph \\ BT_1(1-P)v+ (1-P)v=(1-P)h \qquad \text{in } \overline{R(T)} \end{cases}$$

e quindi

$$Bw+T_1^{-1}w = (1-P)h \qquad w=T_1(1-P)v \qquad (4)$$

Si tratta quindi di risolvere (4). A questo fine, richiamo il seguente risultato di Da Prato-Grisvard (th. 6.3 di [2]).

Teorema 4: Sia $A_1 = 1$, $A_0 = \Lambda$, $X=Y$. Supponiamo che siamo soddisfatte I.II.III (con $h=-1$ e quindi $m=0$) e V con $k=0$, $\beta<0$. Se D_B e D_Λ sono densi in X allora $\exists\ \omega \geq 0$ tale che $\Lambda+B$ è chiudibile ed esiste l'inverso limitato $(\overline{\Lambda+B}-\lambda)^{-1}$ per ogni $\lambda>\omega$.

Se $A_1 A_0^{-1}$ è un operatore potenziale astratto in X, risulta

$$\|(T^{-1}+\lambda)^{-1}\| = \|T(\lambda T+1)^{-1}\| \leq C|\lambda|^{-1},$$

$$\|[B;(T^{-1}+\lambda)^{-1}](B-\lambda)^{-1}\| = \|[B;A_1 A_0^{-1}(\lambda A_1 A_0^{+1})^{-1}](B-\lambda)^{-1}\| =$$

$$= \|[B,A_1(\lambda A_1+A_0)^{-1}]\ (B-\lambda)^{-1}\| < C|\lambda|^{\beta-1}.$$

Ciò implica, in forza del teorema 4, che ha una unica soluzione forte l'equazione

$$(B+T^{-1}+\lambda)w=f$$

per ogni λ sufficientemente grande, cioè esiste un $\omega \in X$ e $\omega_n \in D(T^{-1})$ tali che $\omega_n \to \omega$ in X, $B\omega_n$, $T^{-1}\ \omega_n$ X, $f_n = (B+T^{-1}+\lambda)\omega_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ in X. Ciò significa che esiste $s_n \in Y$, tale che $A_{1sn} \to \omega$ in X, $(B+\lambda) A_1 s_n + A_0 s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$.

Nelle applicazioni, la convergenza $A_1\ s_n \to \omega$ ci dice che s converge in un opportuno spazio legato alla degenerazione di A_1, ad una s che possiamo definire soluzione forte del problema. Su questa falsariga si tratta anche il caso in cui $\overline{R(T)} \neq X$..

Esempio 7: Sia $A(t)$, $0<t<T$, una famiglia di operatori lineari chiusi nel Banach E soddisfacente le ipotesi dell'esempio 2. Se α_0 è un reale positivo, consideriamo l'operatore $A_1(t)$ definito da

$$A_1(t)u(t) = t^{\alpha_0}u(t),\ u \in L^P(0,T;E)$$

e gli operatori A_0, A_1, $(A_0 u)(t) = A(t)u(t)$, u $L^P(0,T;D)$,

$(A_1 u)(t) = A_1(t)u(t)$, u $L^P(0,T;E)$.

Si ha facilmente

$$\|\lambda A_1(\lambda A_1 + A\ )^{-1}\| \leq C, \quad Re\lambda \geq 0$$

e così $\|(\lambda T+1)^{-1}\| \leq Cost$, $Re\lambda \geq 0$, $T = A_1 A_0^{-1}$.

Se $\varphi \in C_0^\infty(0,T;E)$, anche $\varphi t^{-\alpha_0}$ è C^∞ a supporto compatto e questi implica $\overline{R(T)} = L^P(0,T;E) = X$

Ne segue che $T^{-1} = t^{-\alpha_0}A(t)$ è l'opposto del generatore infinitesimale di un semigruppo olomorfo.

Si applica quindi quanto sopra ricordato. Previo un cambiamento opportuno della variabile indipendente, esiste una unica soluzione forte di (4). Esiste cioè $\omega \in L^P(0,T;E)$ ed esiste $\omega_n \in R(T) = R(t^{\alpha_0}A(t))$ tale che $\omega_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \omega$ in $L^P(0,T;E)$, $(B+T^{-1})\,\omega_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ $L^P(0,T;E)$.

Si noti, infatti,

$$\frac{\partial}{\partial t}\, t^{\alpha_0}(\lambda t^{\alpha_0} + A(t))^{-1} = \frac{\partial}{\partial t}\, t^{\alpha_0}A(t)^{-1}\,(\lambda t^{\alpha_0}A(t)^{-1}+1)^{-1}\cdot =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial t}(\partial t^{\alpha_0}A(t)^{-1}+1)^{-1} = (\lambda t^{\alpha_0}A(t)^{-1}+1)^{-1}\left\{\frac{d}{dt}\, t^{\alpha_0}A(t)^{-1}\right\}.$$

$$(\lambda t^{\alpha_0}A(t)^{-1}+1)^{-1} = (\lambda t^{\alpha_0}A(t)^{-1}+1)^{-1}\alpha_0 t^{\alpha_0 - 1}A(t)^{-1}(\lambda t^{\alpha_0}A(t)^{-1}+1)^{-1}\cdot -$$

$$- (\lambda t^{\alpha_0}A(t)^{-1}+1)^{-1} t^{\alpha_0}A(t)^{-1}A'(t)A(t)^{-1}(\lambda t^{\alpha_0}A(t)^{-1}+1)^{-1}.$$

Il secondo addendo si tratta facilmente e si ottiene una maggiorazione in norma del tipo $C|\lambda|^{-1}$.

Per quanto riguarda il primo addendo, osservo che

$$(\lambda t^{\alpha_0}A(t)^{-1}+1)^{-1}(\lambda t^{\alpha_0}A(t)^{-1}+1-1)(\lambda t^{\alpha_0}A(t)^{-1}+1)^{-1} =$$

$$= \alpha_0 \lambda^{-1} t^{-1}\left\{(\lambda t^{\alpha_0}A(t)^{-1}+1)^{-1} - (\lambda t^{\alpha_0}A(t)^{-1}+1)^{-2}\right\}$$

e quindi si ottiene una maggiorazione in norma del tipo $C(|\lambda|t)^{-1}$.

Si può allora utilizzare il Teorema di Hardy per stimare la norma di

$$\int_{\Gamma_{\alpha,\theta}} [B;(T^{-1}+\lambda)^{-1}](B-\lambda)^{-1} f d\lambda$$

in $L^p(0,T;E)$.

Pertanto, esiste $\omega \in L^p(0,T;E)$ ed esiste u_n $D(A_0)$ tale che $A_1 u_n \to \omega$ in $L^p(0,T;E)$ e

$$\frac{d}{dt} t^{\alpha_0} u_n + A_0(t) u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \text{ in } L^p(0,T;E).$$

Interperetiamo la convergenza $A_1\, u_n \to \omega$ in $L^p(0,T;E)$.

$$\int_0^T \| t^{\alpha_0} u_n(t) - \omega(t) \|_E^p dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

dice che $\displaystyle\int_0^T t^{\alpha_0 p} \| u_n(t) - \frac{\omega(t)}{t^{\alpha_0}} \|_E^p dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e quindi esiste

$u \in L^p_{t^{\alpha_0}}(0,T;E)$ tale che $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ in $L^p_{t^{\alpha_0}}(0,T;E)$ e

e $\dfrac{d}{dt} t^{\alpha_0} u_n + A_0(t) u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ in $L^p(0,T;E)$.

Allo stesso modo si potrebbe riconsiderare in questa ottica l'Esempio 3, anche sotto assunzioni più generali $m(t,x)$, permettendo che essa si annulli all'interno di Ω e su insiemi di misura non nulla. Naturalmente, otteremo informazioni sullo stato iniziale $(t=0)$ solo per quei punti in cui $m(t,x) > 0$ (si confronti la tecnica precedente).

Ciò permette anche di fare a meno degli spazi con peso.

La soluzione verrà cercata in spazi di distribuzione, tipo $L^2(0,T;H^{-m}(\Omega))$. A questo proposito, vedi TREVES.